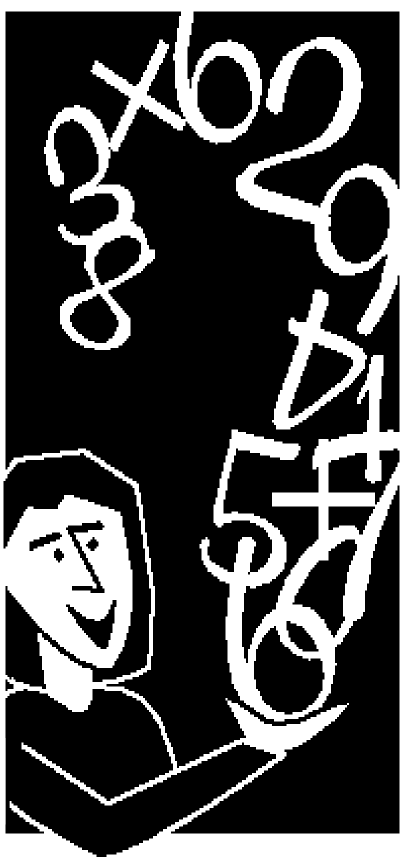
Concours Opti-math
GRMS
Secrétariat
1000, rue Saint-Antoine
Terrebonne, Québec
J6W 1P3

Épreuve finale
Cahier de solutions



Concours
Opti-math 2015

Parrainé par l'Université Laval

Comité d'élaboration des épreuves

Responsable

Martin Duchesne	École secondaire de Mortagne

Comité de rédaction

Rédaction d'items

Mélanie Auclair	C. S. des Hauts-Canton
Claude Boucher	École secondaire Marcellin-Champagnat
Guy Breton	Retraité
Nathalie Demers	École secondaire De Rochebelle
Ghislain Desmeules	Retraité
Martin Duchesne	École secondaire de Mortagne
Éric Lapointe	Pavillon Wilbrod-Dufour
Mathilde Loiselle Davidson	C.S. du Lac Témiscamingue
William Morin	Cégep Beauce Appalache
Marc Plourde	Pavillon Wilbrod-Dufour

Sélection d'items

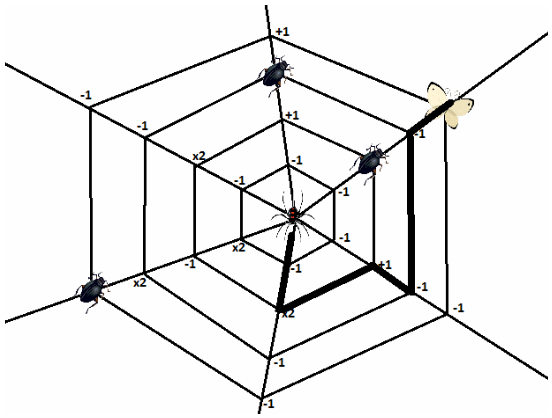
Martin Duchesne	École secondaire de Mortagne

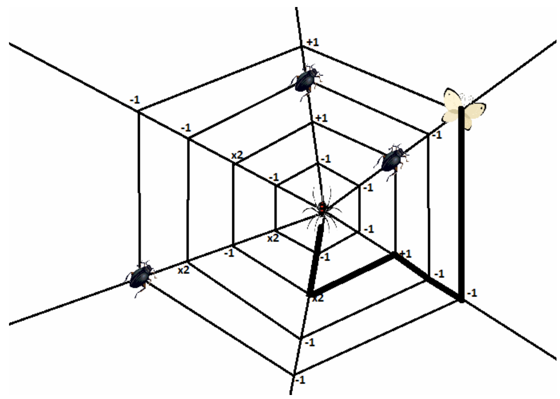
Révision et correction

Claude Boucher	École secondaire Marcellin-Champagnat
Guy Breton	Retraité
Nathalie Demers	École secondaire De Rochebelle
Ghislain Desmeules	Retraité
Éric Lapointe	Pavillon Wilbrod-Dufour
Daniel Ouellet	Polyvalente Le Mistral

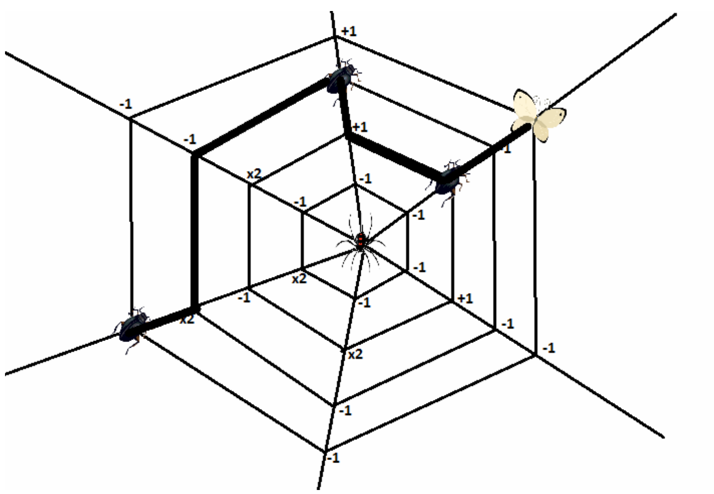
Situation 1 Le jeu de l'araignée

a) Deux solutions sont possibles.





b) L'araignée peut manger les 3 scarabées en un minimum de **7 déplacements**.



Barème : a) Accordez 5 points pour une bonne réponse.
b) Accordez 5 points pour une bonne réponse.

Situation 2 C'est le monde à l'envers

Les chiffres 3, 4, 6, 7 et 9 n'ont pas de significations lorsqu'ils sont reflétés dans un miroir. Le 8 ne peut être placé ni au début ni au milieu puisque l'indication d'heure générée serait impossible, il faut donc l'éliminer également. Il ne reste que les chiffres 0, 1, 2 et 5 qui génèrent une indication possible. Avec ces chiffres, il y a 11 combinaisons différentes pour les heures et 11 pour les minutes.

Par conséquent, il y a en tout $11 \times 11 = 121$ possibilités.

En effet, voici les différentes indications possibles :

00 → 00	05 → 20	12 → 51	21 → 15
01 → 10	10 → 01	15 → 21	22 → 55
02 → 50	11 → 11	20 → 05	

Pour votre information, voici toutes les indications d'heures possibles.

	heure normale	heure inversée
1	00:00	00:00
2	00:01	10:00
3	00:05	20:00
4	00:10	01:00
5	00:11	11:00
6	00:15	21:00
7	00:20	05:00
8	00:21	15:00
9	00:50	02:00
10	00:51	12:00
11	00:55	22:00
12	01:00	00:10
13	01:01	10:10
14	01:05	20:10
15	01:10	01:10
16	01:11	11:10
17	01:15	21:10
18	01:20	05:10
19	01:21	15:10
20	01:50	02:10
21	01:51	12:10
22	01:55	22:10
23	02:00	00:50
24	02:01	10:50
25	02:05	20:50
26	02:10	01:50
27	02:11	11:50
28	02:15	21:50
29	02:20	05:50
30	02:21	15:50
31	02:50	02:50
32	02:51	12:50
33	02:55	22:50
34	05:00	00:20
35	05:01	10:20
36	05:05	20:20
37	05:10	01:20
38	05:11	11:20
39	05:15	21:20
40	05:20	05:20
41	05:21	15:20
42	05:50	02:20
43	05:51	12:20
44	05:55	22:20
45	10:00	00:01
46	10:01	10:01
47	10:05	20:01
48	10:10	01:01
49	10:11	11:01
50	10:15	21:01
51	10:20	05:01
52	10:21	15:01
53	10:50	02:01
54	10:51	12:01
55	10:55	22:01
56	11:00	00:11
57	11:01	10:11
58	11:05	20:00
59	11:10	01:11
60	11:11	11:11
61	11:15	21:11
62	11:20	05:11
63	11:21	15:11
64	11:50	02:11
65	11:51	15:11
66	11:55	22:11
67	12:00	00:51
68	12:01	10:51
69	12:05	20:51
70	12:10	01:51
71	12:11	11:51
72	12:15	21:51
73	12:20	05:51
74	12:21	15:51
75	12:50	02:51
76	12:51	12:51
77	12:55	22:51
78	15:00	00:21
79	15:01	01:21
80	15:05	20:21
81	15:10	01:21
82	15:11	11:21
83	15:15	21:21
84	15:20	05:21
85	15:21	15:21
86	15:50	02:21
87	15:51	12:21
88	15:55	22:21
89	20:00	00:05
90	20:01	10:05
91	20:05	20:05
92	20:10	01:05
93	20:11	11:05
94	20:15	21:05
95	20:20	05:05
96	20:21	15:05
97	20:50	02:05
98	20:51	12:05
99	20:55	22:05
100	21:00	00:15
101	21:01	10:15
102	21:05	20:15
103	21:10	01:15
104	21:11	11:15
105	21:15	21:15
106	21:20	05:15
107	21:21	15:15
108	21:50	02:15
109	21:51	12:15
110	21:55	22:15
111	22:00	00:55
112	22:01	10:55
113	22:05	20:55
114	22:10	01:55
115	22:11	11:55
116	22:15	21:55
117	22:20	05:55
118	22:21	15:55
119	22:50	02:55
120	22:51	12:55
121	22:55	22:55

a) ☑ Il y a 120 possibilités ou plus que l'indication d'heure reflétée existe.

b) Il y a exactement 121 possibilités.

Barème : a) Accordez 4 points pour une bonne réponse. N'accordez aucun point pour une bonne réponse sans démarche.
b) Accordez 6 points pour une bonne réponse avec une démarche valable.
Accordez 3 points pour une bonne réponse avec une démarche partielle.

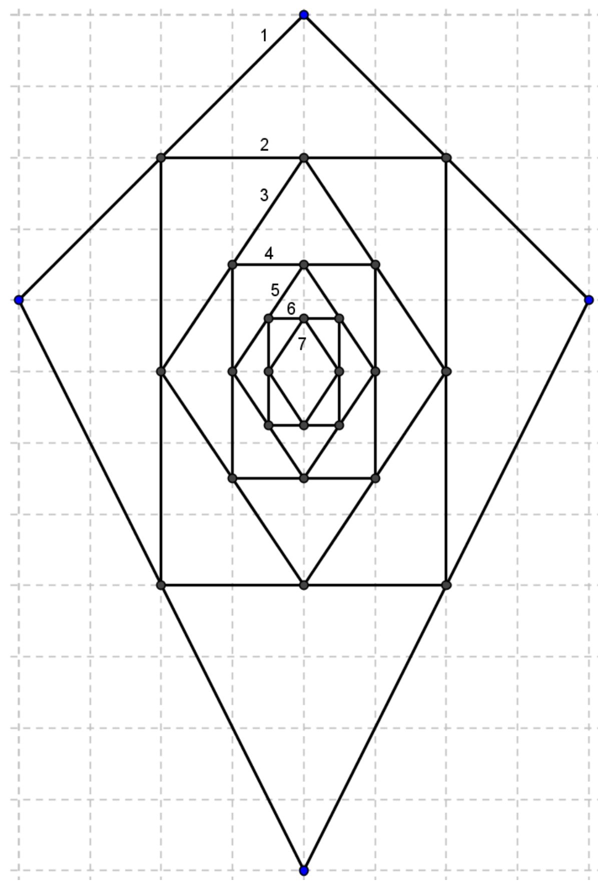
Situation 3 La multiplication des quadrilatères

a) Le quadrilatère obtenu est un **rectangle**.

b) Après avoir répété le processus 6 fois, on obtient les 7 quadrilatères suivant :

Processus répété *x* fois	0	1	2	3	4	5	6
Type de quadrilatère	Cerf-volant	Rectangle	Losange	Rectangle	Losange	Rectangle	Losange

Le type de quadrilatère obtenu après une sixième répétition du processus est un **losange**.



c) Pour un processus répété un nombre pair de fois, on constate que la figure obtenue est un losange.

À l'opposé, pour un processus répété un nombre impair de fois, on constate que la figure obtenue est un rectangle.

Ainsi, le quadrilatère obtenu après 2015 répétitions du processus est un **rectangle**.

Barème : a) Accordez 2 points pour une bonne réponse.
b) Accordez 4 points pour une bonne réponse.
c) Accordez 4 points pour une bonne réponse.

Situation 4 Les math-olympiques

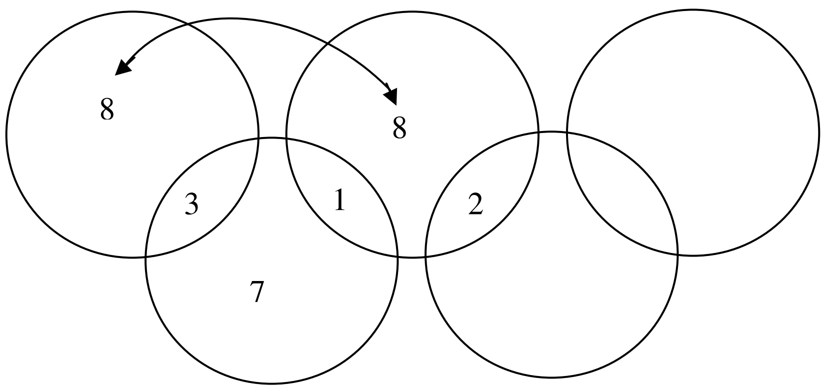
On observe que trois anneaux ont deux intersections et que deux n'ont qu'une intersection. On peut déduire que les deux plus grands nombres doivent être dans ces dernières et que les intersections doivent contenir les plus petits nombres. Comme la somme se doit d'être la plus petite possible, il faut placer les nombres 1-2-3-4 dans les intersections.

La somme de : 1+ 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 1 + 2 + 3 + 4 = 55

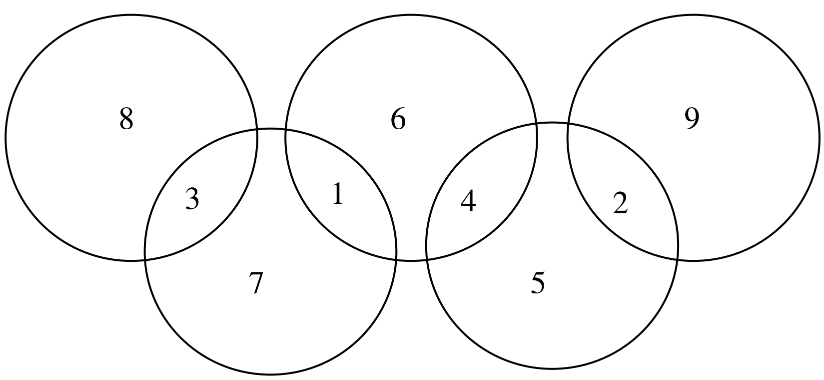
La somme des nombres de chaque anneau devrait être : 55/5 = 11

Le 1 doit obligatoirement se situer dans les intersections de l'anneau avec le T (somme égale à 11). De plus 1 et 4, 2 et 3 ne peuvent être dans les intersections communes de A et H en même temps; conflits pour ces deux lettres.

Si le 1 et le 2 se retrouvent tous les deux au centre, le 8 revient 2 fois.



Il faut donc placer le 1et le 4 dans l'anneau du T.



Il serait possible d'inverser le 8 et le 9, mais pour que le M ait la plus petite valeur possible, sa valeur doit être 8.

La valeur de chacune des lettres est :M = **8**, A = **7**, T= **6**, H= **5**, S= **9**.

Barème : Accordez 10 points pour une bonne réponse.
Accordez 8 points pour la réponse suivante : M = 9 , A = 5 , T= 6 , H= 7 , S= 8.
Accordez 4 points pour avoir trouvé une somme minimale de 11 par cercle.

Situation 5 La course à obstacles

a) Résoudre algébriquement ou par essais-erreurs la longueur de chacune des parties.

$1^{\text{ère}}$ étape → x – 2	On a l'équation suivante : x – 2 + 3(x – 2) + x = 12
2^{e} étape → 3(x – 2)	Solution : x = 4
3^{e} étape → x	Donc **$1^{\text{ère}}$ étape → 2 km**
	2^{e} étape → 6 km
	3^{e} étape → 4 km

Étape	Temps parcours	+	Temps obstacles	=	Temps total
1	$\frac{6\ km}{1\ hr} = \frac{2\ km}{?}$? = 0,33…h ou **20 min**	+	**0 min**	=	**20 min**
2	$\frac{8\ km}{1\ hr} = \frac{6\ km}{?}$? = 0,75 h ou **45 min**	+	20 obstacles ×30 s = 600 s = **10 min**	=	**55 min**
3	$\frac{10\ km}{1\ hr} = \frac{4\ km}{?}$? = 0,4 h ou **24 min**	+	10 obstacles ×24 s = 240 s = **4 min**	=	**28 min**
				Total	**103 min**

Pour compléter la course, il prévoit prendre **103 minutes**.

b) Longueur de chacune des étapes : 6 ÷ 3 = 2 km.

Étape	Temps parcours	+	Temps obstacles	=	Temps total
1	$\frac{6\ km}{1\ hr} = \frac{2\ km}{?}$? = 0,33…h ou **20 min**	+	**0 min**	=	**20 min**
2	$\frac{8\ km}{1\ hr} = \frac{2\ km}{?}$? = 0,25 h ou **15 min**	+	20 obstacles ×30 s = 600 s = **10 min**	=	**25 min**
3	$\frac{10\ km}{1\ hr} = \frac{2\ km}{?}$? = 0,2 h ou **12 min**	+	10 obstacles ×24 s = 240 s = **4 min**	=	**16 min**
				Total	**61 min**

Comme la course a une longueur de 6 km et divisée en trois étapes égales, il prévoit prendre **61 minutes** pour la compléter.

Barème : a) Accordez 6 points pour bonne réponse.
Accordez 4 points pour avoir trouvé les temps des parcours sans obstacle.
Accordez 2 points pour avoir trouvé les distances de chacune des étapes.
b) Accordez 4 points pour bonne réponse et une démarche claire.
Accordez 2 points pour avoir trouvé les temps des parcours sans obstacle
Accordez 1 point pour avoir trouvé les distances de chacune des étapes.

Situation 6 Un mal de chien!

En 2014, comme Monique avait 10 fois la somme des chiffres composant 2014, elle a donc 70 ans.

$$2014 \rightarrow 2+1+0+4=7$$

$$7 \times 10 = 70$$

Ainsi, son chien avait (toujours en 2014) en années de chien 35 ans.

$$70 \div 2 = 35$$

Ensuite, le chien de Monique sera plus vieux qu'elle en 2020. Voyez le tableau suivant.

Année	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
Âge de Monique	70	71	72	73	74	75	76
Âge du chien	35	42	49	56	63	70	77

Comme Monique aura 76 ans en 2020, son fils aura la moitié de son âge, soit 38 ans. Il a donc **33 ans** en 2015.

Barème : a) Accordez 10 points pour bonne réponse avec solution valable.
Accordez 8 points pour avoir trouvé l'année que le chien dépassera Monique avec démarche valable.
Accordez 6 points pour une bonne réponse **SANS** une démarche valable.
Accordez 3 points pour avoir trouvé l'âge de Monique et de son chien en 2014 avec démarche valable.

Situation 7 Le dernier passager

a) Il est possible aussi de faire un arbre des probabilités.

$P(\text{bleus ne choisissent pas la bonne clé}) = \frac{1}{2}$

$P(\text{rouges choisissent le bonne clé}) = \frac{1}{6}$

Soit R={l'équipe des rouges gagne}

$P(R) = P(\text{bleus ne choisissent pas la bonne clé suivi que les rouges choisissent le bonne clé})$

$P(R) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \approx 8{,}33\%$

La probabilité que l'École des Rouges gagne est de $\frac{1}{12}$ ou $8{,}33\%$ (acceptez un pourcentage arrondi à une position différente).

b) Voici la démarche en détails.

$P(\text{bleus choisissent la bonne au début}) = \frac{1}{2}$

$P(\text{bleus choisissent la mauvaise au début}) = \frac{1}{2}$

$P(\text{rouges choisissent la mauvaise au début}) = \frac{5}{6}$

$P(\text{verts choisissent la mauvaise au début}) = \frac{8}{9}$

Soit B={l'équipe des bleus gagne}

$P(B) = P(\text{bleus choisissent la bonne au début OU que bleus, rouges et verts choisissent la mauvaise à leur premier essai})$

$P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times \frac{8}{9} = \frac{47}{54} \approx 87\%$

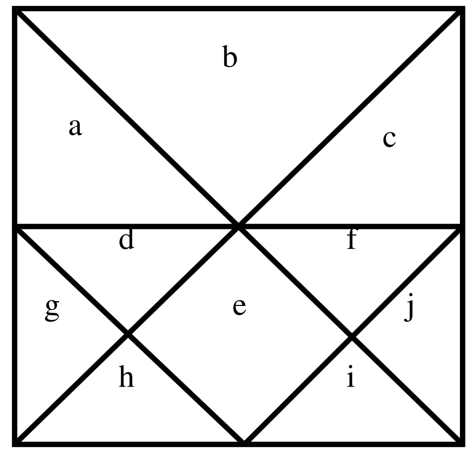
La probabilité que l'École des Bleus gagne est de $\frac{47}{54}$ ou 87% (acceptez un pourcentage arrondi à une position différente).

Barème : a) Accordez 4 points pour une bonne réponse et une démarche valable.
Accordez 2 points pour un arbre de probabilités, même s'il comporte des erreurs.
b) Accordez 6 points pour une bonne réponse et une démarche valable.
Accordez 4 points pour n'avoir calculé que la deuxième probabilité (c'est-à-dire oublié le 0,5 du premier coup).
Accordez 2 point pour avoir répondu 50%.

Situation 8 Triangles ou quadrilatères

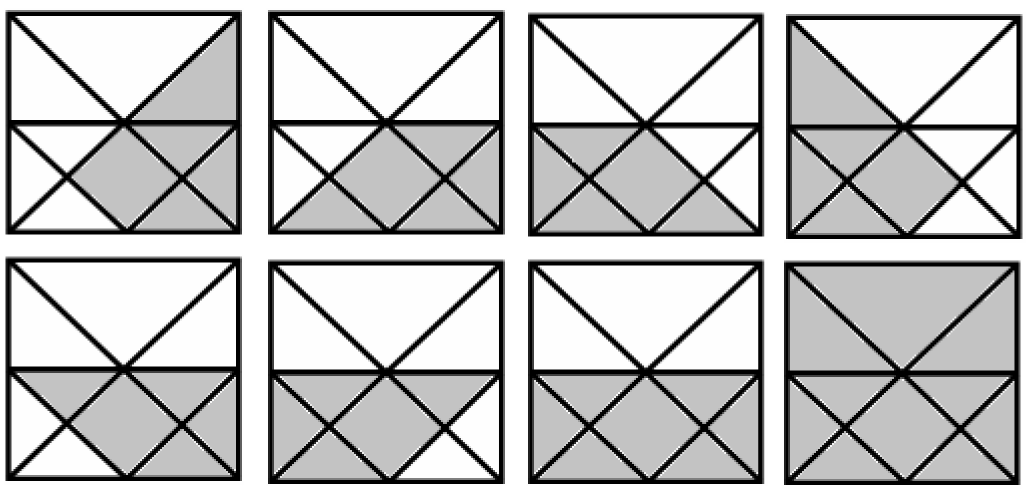
a) Il y a **<u>21 différents triangles</u>** au total.

On peut dresser la liste des triangles en les regroupant par nombres de régions suivant l'identification ci-contre.



1 région (9 triangles) :	a – b – c – d – g – h – f – j – i
2 régions (4 triangles) :	gd – gh – fj – ij
3 régions (4 triangles) :	def – adg – cfj – hei
4 régions (2 triangles) :	abdg – bcfj
6 régions (2 triangles) :	cfjeih – adeghi

b) Il y a **<u>8 quadrilatères</u>** formés de 5 régions ou plus.



Barème : a) Accordez 5 points pour une bonne réponse.
Accordez 3 points pour avoir trouvé 20 ou 22 triangles.
Accordez 1 point pour avoir trouvé 19 ou 23 triangles.
b) Accordez 5 points pour avoir trouvé les 8 quadrilatères valides <u>seulement</u>.
Accordez 3 points pour avoir trouvé 7 ou 8 quadrilatères valides.
Accordez 1 point pour avoir trouvé 6 quadrilatère valide.

<u>Le concours prend fin ici pour les élèves de secondaire 1.</u>

Situation 9 Le mur algébrique

a) Voici le mur complété.

2a+23			
16	**2a+7**		
3a+6	-3a+10	5a-3	
2a+6	a	**-4a+10**	**9a-13**

b) Voici le mur complété.

3x-5			
7x-1	**4x+4**		
9x+12	**2x+13**	-2x+9	
8x+29	**-x+17**	**-3x+4**	-x-5

Barème : a) Accorder 5 points pour une bonne réponse. Enlever 1 point par erreur jusqu'à concurrence de 5.
b) Accorder 5 points pour une bonne réponse. Enlever 1 point par erreur jusqu'à concurrence de 5.

Situation 10 Cholestérol et cancer du sein

N.B. Afin d'alléger le texte et améliorer la compréhension, veuillez considérer le terme « *cancéreuse* » comme signifiant « une femme ayant un cancer du sein ».

a) Pour les 22 938 femmes souffrant d'hyperlipidémie, 641 221 n'en souffraient pas (664 159 −22 938= 641 221).

On a :

Nombre de cancéreuses :	9312
Nombre de cancéreuses <u>sans</u> hyperlipidémie :	*n*
Nombre de cancéreuses <u>avec</u> hyperlipidémie :	9312 – *n*
Nombre de femmes <u>avec</u> hyperlipidémie :	22 938
Nombre de femmes <u>sans</u> hyperlipidémie :	641 221

Aussi, le rapport des cancéreuses parmi celles qui souffraient d'hyperlipidémie vaut 1,64 fois celui des cancéreuses qui ne souffraient pas d'hyperlipidémie. On a donc l'égalité des rapports suivants :

$$\frac{\text{\# de cancéreuses avec hyperlipidémie}}{\text{\# de femmes avec hyperlipidémie}} = 1{,}64 \times \frac{\text{\# de cancéreuses sans hyperlipidémie}}{\text{\# de femmes sans hyperlipidémie}}$$

$$641\,221(9312 - n) = 22\,938 \times 1{,}64n$$

La solution de cette équation est n ≈ 8796

Il y a **8796 femmes** qui ont développé un cancer du sein dans le groupe <u>qui ne souffraient pas</u> d'hyperlipidémie.

b) L'échantillon étant très important, on peut généraliser le résultat de la recherche.

Nombre de cancéreuses avec hyperlipidémie (9312 – 9000) : 312

$$\frac{\text{\# de cancéreuses avec hyperlipidémie}}{\text{\# de femmes avec hyperlipidémie}} = \frac{x}{400}$$

$$\frac{312}{22\,938} = \frac{x}{400}$$

$$x \approx 5{,}44\ldots \approx 5$$

Il y a environ **5 femmes** sur 400 qui ont probablement un cancer du sein si elles souffrent d'hyperlipidémie.

Barème : a) Accordez 6 points pour une bonne réponse et une démarche valable.
Accordez 4 points pour une mauvaise réponse due à une erreur mineure et une démarche valable.
Accordez 2 points pour une mauvaise réponse avec une démarche partiellement bonne.
b) Accordez 4 points pour une bonne réponse et une démarche valable.
Accordez 2 points pour une mauvaise réponse due à une erreur mineure et une démarche valable.
Accordez 1 point pour une mauvaise réponse avec une démarche partiellement bonne.

Situation 11 Les sandwichs

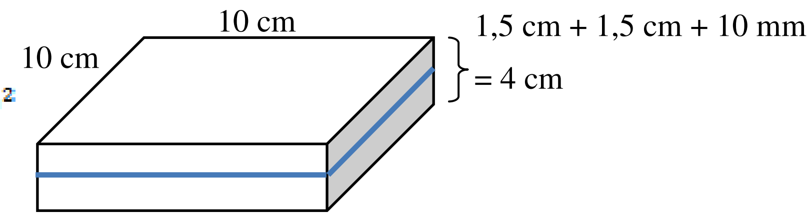
Sandwich non coupé

$$A_T = A_L + 2 \times A_B$$

$$A_T = 4(10 \times 4) + 2 \times 10^2$$

$$A_T = 160 + 200$$

$$A_T = 360\ cm^2$$



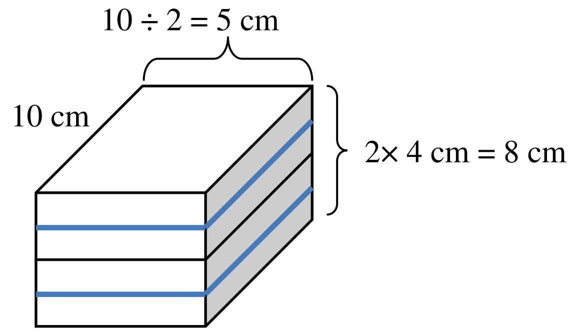
a) Sandwich coupé en 2 rectangles :

$$A_T = A_L + 2 \times A_B$$

$$A_T = 30 \times 8 + 2(5 \times 10)$$

$$A_T = 240 + 100$$

$$A_T = 340\ cm^2$$



Le rapport de l'aire de la surface à couvrir d'un sandwich coupé en rectangles et l'aire de la surface à couvrir d'un sandwich non coupé est de :

$$\boxed{\frac{340\ cm^2}{360\ cm^2} \approx 94{,}4\%}$$

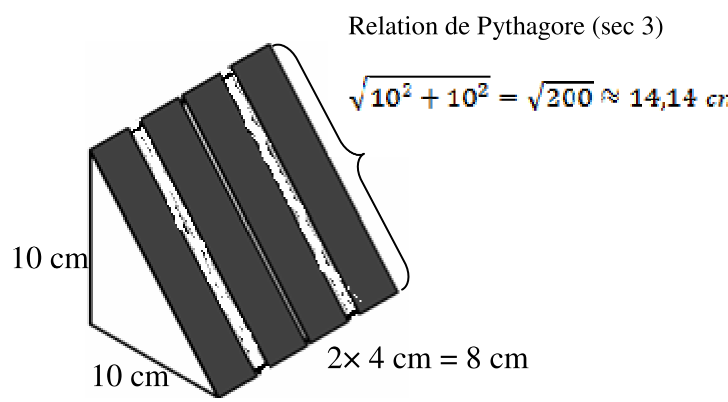
b) Sandwich coupé en 2 triangles :

$$A_T = A_L + 2 \times A_B$$

$$A_T = 34{,}14 \times 8 + 2(10 \times 10/2)$$

$$A_T = 273{,}12 + 100$$

$$A_T = 373{,}12\ cm^2$$



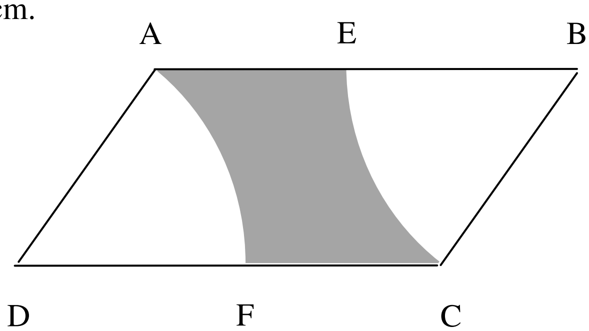
Le rapport de l'aire de la surface à couvrir d'un sandwich coupé en triangles et l'aire de la surface à couvrir d'un sandwich non coupé est de :

$$\boxed{\frac{373{,}12\ cm^2}{360\ cm^2} \approx 103{,}6\%}$$

Barème : a) Accordez 4 points pour une bonne réponse et une démarche valable (ne pas pénaliser pour une réponse arrondie).
Accordez 2 points pour avoir trouvé l'aire des deux sandwichs (non coupé et triangles) avec une démarche valable.
b) Accordez 6 points pour une bonne réponse et une démarche valable (ne pas pénaliser pour une réponse arrondie).
Accordez 4 points pour avoir trouvé l'aire des deux sandwichs (non coupé et triangles) avec une démarche valable.
Accordez 2 points pour avoir calculé l'hypoténuse du triangle.

Situation 12 On coupe les coins ronds

a) Les deux arcs AF et EC sont isométriques et ensemble, ils correspondent au tiers de la circonférence d'un cercle de rayon de 20 cm.



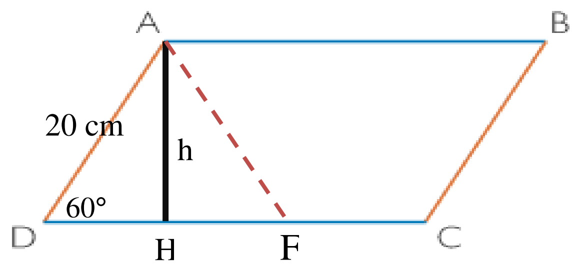
$$Périmètre_{AECF} = m\overline{AE} + m\overline{CF} + \frac{C}{3}$$

$$= 20 + 20 + \frac{\pi \times 2 \times 20}{3}$$

$$\approx 81{,}9\ cm$$

b) Pour trouver l'aire du parallélogramme, il faut trouver sa hauteur *h* en construisant un triangle DAF qui est équilatéral, car isocèle et avec un angle de 60°.

Comme la médiane est supportée par la hauteur, on a $m\overline{DH} = 10\ cm$.



$$h = \sqrt{20^2 - 10^2}cm \approx 17{,}321\ cm$$

$$A_{AECF} = A_{ABCD} - \frac{A_{cercle}}{3}$$

$$= 40 \times 17{,}321 - \frac{\pi \times 20^2}{3}cm^2 \approx 274\ cm^2$$

c) En utilisant le même raisonnement qu'à la question précédente, on a $m\overline{DH} = \frac{r}{2}\ cm$

$$h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}r}{2}$$

$$A_{AECF} = A_{ABCD} - \frac{A_{cercle}}{3}$$

$$= 2r \times \frac{\sqrt{3}r}{2} - \frac{\pi \times r^2}{3}$$

$$= \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) r^2 \approx 0{,}685r^2$$

Autre raisonnement possible en utilisant la réponse trouvée en *b)* :

$$A_{AECF} = \frac{274}{20^2}r^2 = \frac{274}{400}r^2 = 0{,}685r^2$$

Barème : a) Accordez 3 points pour une bonne réponse et une démarche valable.
Accordez 1 point pour une démarche partiellement bonne.
Ne pas pénaliser pour l'arrondissement.
b) Accordez 3 points pour une bonne réponse et une démarche valable.
Accordez 1 point pour une démarche partiellement bonne.
Ne pas pénaliser pour l'arrondissement.
c) Accordez 4 points pour une bonne réponse et une démarche valable.
Accordez 3 points pour une mauvaise réponse due à une erreur mineure et une démarche valable.
Accordez 1 point pour une démarche partiellement bonne.
Ne pas pénaliser pour l'arrondissement.